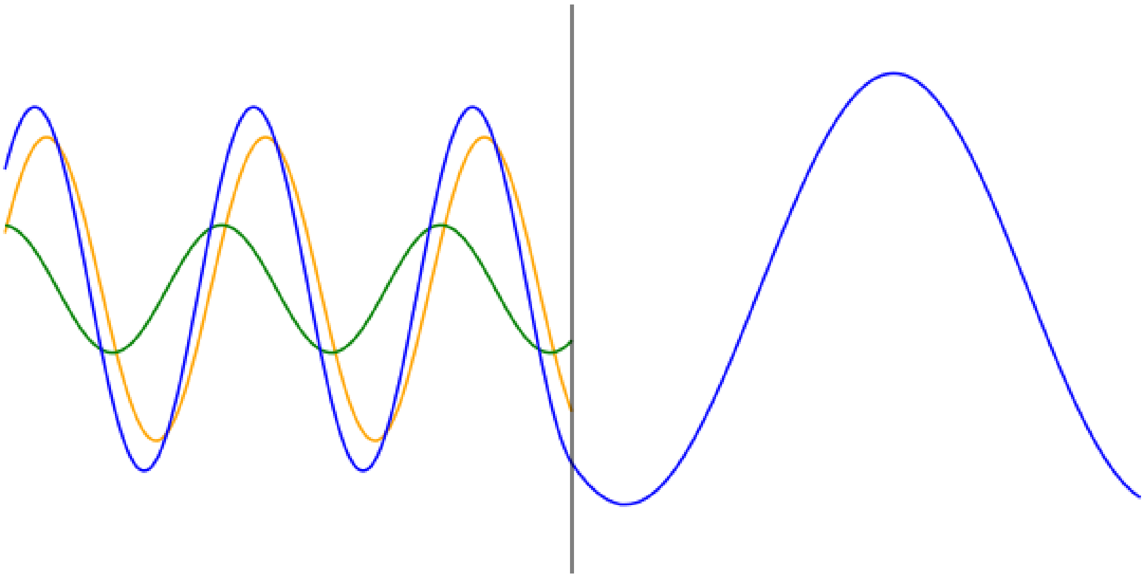
OTTO VON GUERICKE
UNIVERSITÄT
MAGDEBURG

LEHRSTUHL
THEORETISCHE
ELEKTROTECHNIK

Elektromagnetische Wellen an Medienübergängen

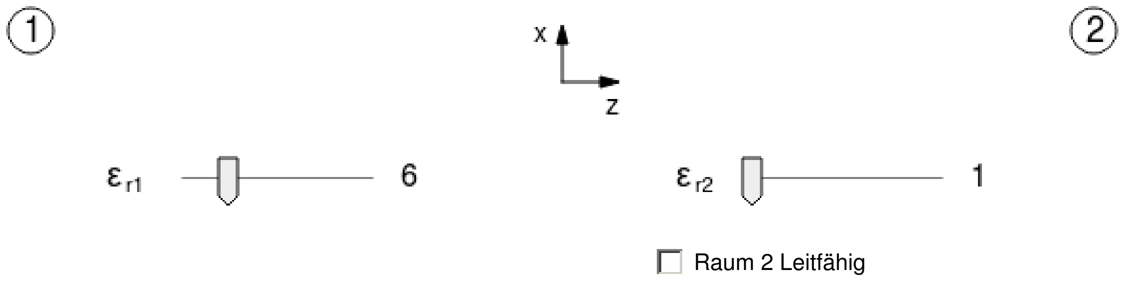
Die Animation zeigt die Reflexion und Transmission einer elektromagnetischen Welle an einem dielektrischen bzw. leitfähigen Medium. Zur Vereinfachung werden ebene Wellen betrachtet, d.h. deren Wellenfronten (Flächen gleicher Phase) Ebenen sind. (Hinweis: Gleichungen können durch Anklicken vergrößert werden)



einfallende Welle

reflektierte Welle

Überlagerung



1.) Ausbreitung elektromagnetischer Wellen

Die Ausbreitung einer Welle in z-Richtung mit dem elektrischen Feld $\underline{\mathbf{E}}_x$ in x-Richtung wird durch die Feldwellengleichung

$$\frac{\delta^2 \underline{E}_x}{\delta z^2} - \underline{\gamma}^2 \underline{E}_x = 0$$

beschrieben. Dabei ist $\underline{\gamma}$ die komplexe Ausbreitungskonstante mit der Wellenzahl $k = \omega\sqrt{(\mu\varepsilon)}$:

$$\underline{\gamma}^2 = j\omega\mu\kappa - k^2 = j\omega\mu\kappa(1 + j\frac{\omega\varepsilon}{\kappa})$$

Aufgeteilt nach Real- und Imaginärteil folgt $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$ mit der Dämpfungskonstante

$$\alpha = k\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{1 + (\kappa/\omega\varepsilon)^2} - 1)}$$

und der Phasenkonstante

$$\beta = k\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{1 + (\kappa/\omega\varepsilon)^2} + 1)}$$

Die allgemeine Lösung für ebene Wellen der Gleichung (1) besteht aus einer hinlaufenden und einer rücklaufenden Welle:

$$\underline{E}_x(z) = \underline{E}_x^{+} \cdot e^{-\underline{\gamma} z} + \underline{E}_x^{-} \cdot e^{+\underline{\gamma} z}$$

Um die realen Felder einer in positiver z-Richtung laufenden Welle darzustellen, wird der Realteil gebildet:

$$E_x(z,t) = \mathrm{Re}(\underline{E}_x^{+} \cdot e^{-\underline{\gamma} z} \cdot e^{j\omega t}) = |\underline{E}_x^{+}| \cdot e^{-\alpha z} \cdot \mathrm{Re}(e^{j(\omega t - \beta z)}) = |\underline{E}_x^{+}| \cdot e^{-\alpha z} \cdot \cos(\omega t - \beta z)$$

2.) Reflexion und Transmission

Die einfallende Welle wird an der Mediengrenze in Abhängigkeit von den jeweiligen Medieneigenschaften reflektiert und transmittiert. Dabei werden die Amplituden der reflektierten Welle mit dem Reflexionsfaktor R und der transmittierten Welle mit dem Transmissionsfaktor T berechnet. Es gilt:

$$\underline{R} = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}$$

$$\underline{T} = \frac{2\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}$$

mit dem Wellenwiderstand $\underline{Z}_n$ des jeweiligen Mediums

$$\underline{Z}_n = \frac{j\omega\mu_n}{\underline{\gamma}_n}$$

folgt für die Beträge von (7) und (8) unter der Bedingung $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$:

$$|\underline{R}| = \frac{1 - |\underline{\gamma}_2| / |\underline{\gamma}_1|}{1 + |\underline{\gamma}_2| / |\underline{\gamma}_1|}$$

$$|\underline{T}| = \frac{2}{1 + |\underline{\gamma}_2| / |\underline{\gamma}_1|}$$

Für **Medium 1** gilt mit den Bedingungen $\mu_1 = \mu_0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1}$ und $\kappa_1 = 0$ und den Gleichungen (3) und (4):

$$\underline{\gamma}_1 = j\beta_1 = j\omega\sqrt{\mu_0\, \varepsilon_0\, \varepsilon_{r1}}$$

Für **Medium 2** wird zwischen dem dielektrischen und dem leitfähigen Medium unterschieden.
a) dielektrisches Medium mit $\mu_2 = \mu_0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2}$ und $\kappa_2 = 0$

$$\underline{\gamma}_2 = j\beta_2 = j\omega\sqrt{\mu_0\, \varepsilon_0\, \varepsilon_{r2}}$$

b) leitfähiges Medium mit $\mu_2 = \mu_0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$ und $\kappa_2 \neq 0$

$$\underline{\gamma}_2 = \alpha_2 + j\beta_2$$

Eingesetzt in (10) und (11) führt dies mit der Amplitude der einfallenden Welle E_0 nach (5) auf die Gleichungen für Medium 1 und Medium 2:

$$\underline{E}_{x1}(z) = E_0 \cdot e^{-j\beta_1 z} + \underline{R} \cdot E_0 \cdot e^{+j\beta_1 z}$$

$$a) \quad \underline{E}_{x2}(z) = \underline{T} \cdot E_0 \cdot e^{-j\beta_2 z} \qquad b) \quad \underline{E}_{x2}(z) = \underline{T} \cdot E_0 \cdot e^{-(\alpha_2 + j\beta_2) z}$$

Nach Anwenden von (6) erhält man die in der Animation dargestellten Gleichungen:

$$E_{x1} = E_0 \cdot \cos(\omega t - \beta_1 z) + |\underline{R}| \cdot E_0 \cdot \cos(\omega t + \beta_1 z)$$

$$a) \quad E_{x2} = |\underline{T}| \cdot E_0 \cdot \cos(\omega t - \beta_2 z) \qquad b) \quad E_{x2} = |\underline{T}| \cdot E_0 \cdot e^{-\alpha_2 z} \cdot \cos(\omega t - \beta_2 z)$$

3.) Literatur

[1]	H. Henke, *Elektromagnetische Felder - Theorie und Anwendung*, 3. Aufl. Springer, Berlin, 2007
[2]	M. Leone, *Skriptum Theoretische Elektrotechnik*, WS2012/13