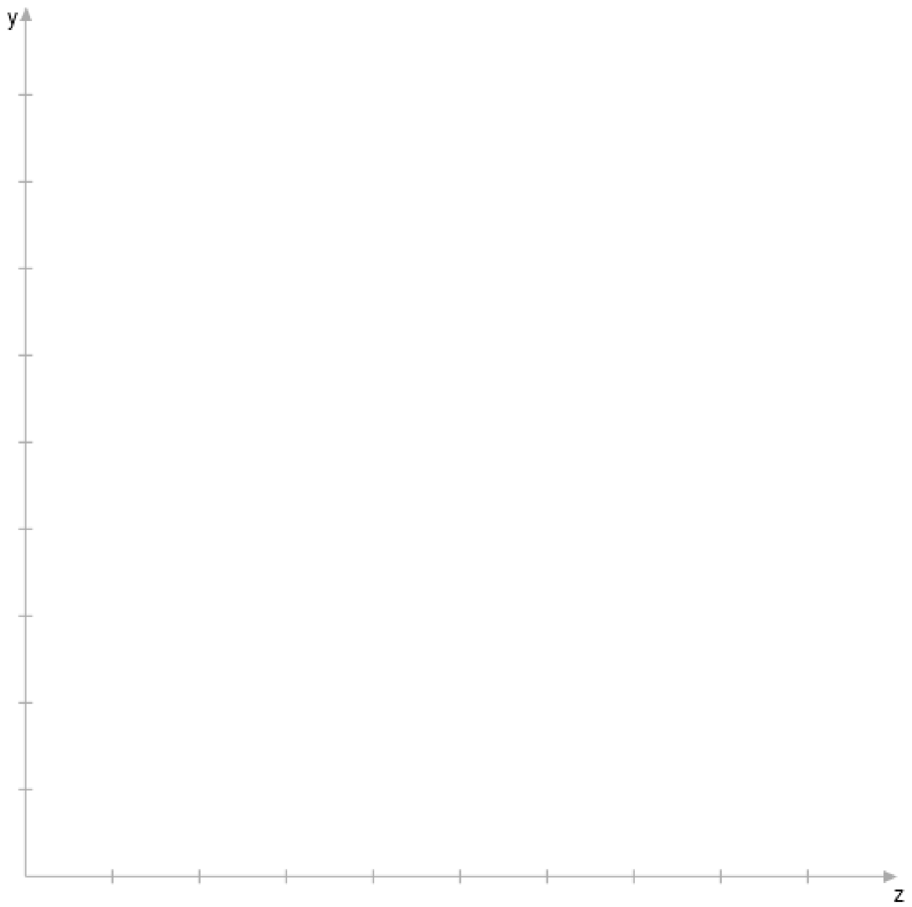
LEHRSTUHL
THEORETISCHE
ELEKTROTECHNIK

Reflexion und Brechung ebener Wellen

Eine ebene und senkrecht bzw. parallel polarisierte Welle trifft unter dem Winkel α_1 auf einen Medienübergang. Dieser ist charakterisiert durch die Materialparameter der unterschiedlichen Medien ε_1, ε_2 und κ_2. In der folgenden Abbildung sind die Feldlinien des magnetischen bzw. elektrischen Feldes in Abhängigkeit der Materialparameter und des Einfallswinkels dargestellt.



α_1 °

ε_{r1}

ε_{r2}

κ_2

$|r_s|$

$|t_s|$

Aktualisieren

Einstellungen

H Polarisation wechseln sen

Herleitung

Für eine Feldline gilt, dass ein differentielles Wegelement $\mathrm{d}\mathbf{r}$ immer parallel zur Feldlinie ist:

$$\mathbf{H} \times \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{0}$$

Mit der ersten Maxwell'schen Gleichung folgt:

$$-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}(\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{0}$$

Wertet man die Kreuzprodukte im Zweidimensionalen mit dem Wegelement $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}y\,\mathbf{e}_y + \mathrm{d}z\,\mathbf{e}_z$ aus, erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial z} E_x \mathrm{d}z + \frac{\partial}{\partial y} E_x \mathrm{d}y = 0$$

Damit erhält man die Feldlinien aus den Höhenlinien einer Potentialfunktion Φ:

$$\Phi(y, z) = -\frac{2}{\mathrm{j}\,\omega\,\mu} E_x = \text{const.}$$

Die Feldstärke in beiden Teilräumen erhält man durch die Überlagerung der einfallenden Welle mit der reflektierten Welle oder durch die transmittierte Welle. Für senkrechte Polarisation gilt, wie in der Abbildung dargestellt:

$$\mathbf{E}_e = E_0\,\mathbf{e}_x\,e^{-\mathrm{j}\mathbf{k}_e\cdot\mathbf{r}} \qquad \mathbf{E}_r = r_s\,E_0\,\mathbf{e}_x\,e^{-\mathrm{j}\mathbf{k}_r\cdot\mathbf{r}} \qquad \mathbf{E}_t = t_s\,E_0\,\mathbf{e}_x\,e^{-\mathrm{j}\mathbf{k}_t\cdot\mathbf{r}}$$

Mit den Skalarprodukten der Wellevektoren mit einem beliebigen Aufpunkt **r**

$$\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} = k_1 \left(\sin(\alpha_1)\,y + \cos(\alpha_1)\,z\right)$$

$$\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = k_1 \left(\sin(\alpha_1)\,y - \cos(\alpha_1)\,z\right)$$

$$\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} = k_2 \left(\sin(\alpha_2)\,y + \cos(\alpha_2)\,z\right)$$

und den Wellenzahlen der Teilräume

$$k_1 = \omega\sqrt{\mu_0\,\varepsilon_{r1}\,\varepsilon_0}$$

$$k_2 = \omega\sqrt{\mu_0\,\varepsilon_{r2}\,\varepsilon_0}\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa_2}{\omega\,\varepsilon_2\,\varepsilon_0}\right)^2} + 1\right)} - \mathrm{j}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa_2}{\omega\,\varepsilon_2\,\varepsilon_0}\right)^2} - 1\right)}\right)$$

erhält man:

$$E_{1x} = E_0\,e^{-\mathrm{j}k_1\left(\sin\,(\alpha_1 y + \cos\,(\alpha_1)\,z)\right)}\left(1 + r_s\,e^{\mathrm{j}k_1 2\cos\,(\alpha_1)\,z}\right)$$

$$E_{2x} = t_s\,E_0\,e^{-\mathrm{j}k_2\left(\sin\,(\alpha_2 y + \cos\,(\alpha_2)\,z)\right)}$$

Der Winkel α_2 ergibt sich aus dem Snellius'schen Brechungsgesetz:

$$\alpha_2 = \arcsin\left(\frac{k_1}{k_2}\sin(\alpha_1)\right)$$

Für den Reflexions- bzw. Transmissionsfaktor gilt:

$$r_s = \frac{Z_2\cos(\alpha_1) - Z_1\cos(\alpha_2)}{Z_2\cos(\alpha_1) + Z_1\cos(\alpha_2)}$$

$$t_s = \frac{2\,Z_2\cos(\alpha_1)}{Z_2\cos(\alpha_1) + Z_1\cos(\alpha_2)}$$

mit der Impedanz des jeweiligen Mediums Z. Die Darstellung der Feldlinien erfolgt durch Bildung des Realteils der Feldkomponenten. Die Berechnung der Feldlinien des elektrischen Feldes bei paralleler Polarisation erfolgt analog.